Módulos de apoyo docente para la enseñanza de las fracciones en la Educación General Básica de Costa Rica.[1]

Jessica González y Kandy Ruiz
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica
jesgonmo@gmail.com
kandyrm@gmail.com

Resumen

Se presenta la construcción de una secuencia de módulos o guías para docentes de la E.G.B costarricense, para la enseñanza de las fracciones, cumpliendo con los lineamientos establecidos en el Programa de Matemática 2012 del MEP y considerando las teorías de Brousseau, Polya y Douady; así como posiciones teóricas sobre el concepto de fracción, sus interpretaciones y aplicaciones.

Palabras Clave: Fracciones, Situaciones Problema, Preguntas Generadoras.

1. Introducción

Se presenta una propuesta pedagógica basada en módulos de apoyo a los profesores en la enseñanza de fracciones en la Educación General Básica (EGB) de Costa Rica. Con el fin de colaborar en el proceso de enseñanza de las fracciones, basados en la resolución de problemas para que los estudiantes adquieran las habilidades pertinentes según las exigencias de la propuesta curricular en matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP).

La formación matemática que actualmente se brinda en las aulas de nuestro país se limita a una enseñanza de procedimientos automáticos para la solución de problemas particulares, brindando reglas y pasos que buscan simplificar la matemática y así encasillar su enseñanza a ejercicios rutinarios y memorísticos.

[1] Este es un resumen de algunos aspectos desarrollados en la tesis: *Módulos de apoyo docente para la enseñanza de las fracciones en la Educación General Básica de Costa Rica*, recibida en la Carrera de Enseñanza de la Matemática en la Universidad de Costa Rica, para optar por el grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en el año 2013. El director de la tesis fue Asdrúbal Duarte.

Ante esta perspectiva, nace la preocupación por parte del MEP de orientar la educación en el área de matemática hacia un currículo que involucre al estudiantado y le permita considerar los conocimientos como algo propio de su cotidianidad y de esta forma, puedan desarrollar las habilidades deseadas. Es así, que el saber matemática en la actualidad implica la capacidad de razonamiento y el desarrollo de criticidad para analizar las situaciones que nos rodean.

En Costa Rica, hay poco material relacionado con la enseñanza de las fracciones y sus posibles aplicaciones, pero se reconoce su importancia en situaciones de la vida cotidiana y en otras ciencias. El interés de este trabajo es brindar un apoyo al docente en su necesidad de favorecer el aprendizaje del concepto de fracción, en particular en la asimilación de las diferentes interpretaciones, sugiriendo algunas alternativas de solución para favorecer el aprendizaje su aprendizaje.

Como establece Arce (2011, p.3):

Actualmente los planes de estudios escolares de Costa Rica no propician el estudio de la diversidad semántica de la fracción dado que plantean el estudio de los significados en diversos grados académicos y no se observa un objetivo que promueva la integración y diferenciación de los conceptos asociados a la fracción.

Entonces, basados en los criterios de algunos autores, parece que la dificultad en el aprendizaje se debe, entre otros, al abordaje tradicional del docente quien imparte lecciones magistrales que se limitan a la enseñanza de conceptos aislados, sin establecer relaciones entre ellos ni a la aplicabilidad que estos pueden tener, sin tomar en cuenta el “saber hacer”. Al respecto, Alvarado (2005, citado por Gaete y Jiménez, 2011, p. 99) escribe que el enfoque tradicional se basa en el manejo de contenidos, métodos y técnicas dependientes de la memorización de éstos, ausencia de oportunidad para reflexionar sobre lo que se estudia (conocimiento estático), promoción e inserción en el contexto social en forma abstracta, prioridad de la aplicación de métodos y técnicas, no de la producción e inclinación a la evaluación de la reproducción de conocimiento.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) respalda esta idea en sus estándares curriculares, estableciendo que:

Para adquirir una cultura matemática los estudiantes han de saber algo más que aritmética. (…) Un enfoque informal a este nivel pone las bases para posteriores estudios y permite que los niños adquieran el conocimiento adicional que van a necesitar. (NCTM, 2004, p. 16)

Cuando el estudiante forma esa “cultura matemática”, es capaz de trasladar sus conocimientos más allá del contexto de aula. Para lograrlo, Godino y otros (2004, p.23) afirman que las aplicaciones matemáticas tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Si queremos que el alumno valore su papel, es importante que los ejemplos y situaciones que mostramos en la clase hagan ver, de la forma más completa posible, el amplio campo de fenómenos que las matemáticas permiten organizar.

De esta manera, existe la necesidad de que los estudiantes desarrollen habilidades matemáticas en la resolución de problemas en diversos contextos, en vez de limitar su formación a contenidos y por tanto, trabajar en una formación nueva, “más centrada en el aprendizaje y en la que la función del profesor debe estar focalizada en su labor de guía y moderador del aprendizaje” (Murillo y Marcos, 2008, p. 5).

Por todas las situaciones presentadas anteriormente, en esta investigación se considera recomendable pensar en una renovación pedagógica para centrarse en el aprendizaje, al tratar situaciones en las que se utilizan las matemáticas fuera del contexto institucional.

2. Marco Teórico

Este trabajo está conformado por seis módulos, los cuales se entienden como un planteamiento de clase donde se propone una secuencia de situaciones problema para abordar ejes temáticos relacionados con la fracción y sus interpretaciones, mediante un desarrollo analítico basado en preguntas generadoras.

Con base en el trabajo de Riera (2006) se considera importante que los módulos:

- Sean facilitadores del aprendizaje mediante el uso de lenguaje simplificado.
- Interrelacionen el conocimiento teórico con el práctico, es decir, que estén basados en la parte teórica del tema en estudio y lo implementen hacia lo práctico con el objetivo de que se comprenda y ponga en ejecución lo aprendido en teoría.
- Presenten una parte visual- gráfica para comprender, al inicio de cada módulo, las características del tema que está siendo objeto de estudio.

En el desarrollo y elaboración de los módulos se ha considerado, según plantea el nuevo programa de matemática MEP (2012), introducir la enseñanza de un tema a través de una situación problema, lo cual es uno de los cinco procesos matemáticos que han sido establecidos como centrales dentro del currículo presente en este programa.

El proceso de resolución de problemas se define como una “actividad que provoca el planteamiento, diseño y resolución de problemas, así como la modelización de situaciones por medio de las matemáticas” (Barrantes et al., 2012, p.30).

Los módulos, hasta donde se ha considerado conveniente, siguen los lineamientos del nuevo programa de Matemática del MEP y en esa medida, la Teoría de Situaciones Didácticas es un sustento teórico importante en la propuesta. Al respecto, Guy Brousseau plantea que es conveniente introducir los temas a enseñar a partir de una situación problema, que da luego paso a una fase de discusión, tal aspecto lo describe Sadovsky (2005) al citar a Brousseau:

> el trabajo del docente consiste pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no al deseo del maestro.

De esta manera, se entiende que la construcción del conocimiento en el estudiante se logra dar a través de una situación didáctica, y la interacción entre el docente, el alumno y el medio didáctico. Este proceso permite institucionalizar el conocimiento, lo cual se comprende como “la consideración *oficial* del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro” (Brousseau, 1988; citado por Sadovsky, 2005).

Se interpreta la institucionalización como una fase esencial del proceso didáctico, ya que se da el reconocimiento tanto por el alumno como por el docente de los conocimientos socialmente válidos. Al respecto, en los fundamentos del nuevo programa de matemática MEP (Barrantes et al., 2012, p.13), se indica que la institucionalización es “el momento en que el docente revela o consigna los contenidos teóricos disciplinares que estaban involucrados”, es decir se vincula al estudiante con el saber matemático.

Finalmente, se da una fase de devolución del problema, definida en la Teoría de Situaciones Didáctica como situación a-didáctica, la cual según Sadovsky (2005) se refiere

> al tipo de compromiso intelectual que el alumno tiene con el *medio* y no alude al ‘silencio’ del maestro sino al hecho de que, para dar lugar a la producción del conocimiento, el docente no explicita cuáles son los conocimientos que el alumno debe movilizar.

Se entiende así, que la devolución del problema es el proceso que el alumno efectúa ante una situación de aprendizaje que se le ha planteado y que debe resolver con el conocimiento adquirido, es decir, el estudiante resuelve una situación contextualizada sin la intervención del docente.

Como segunda fase la institucionalización del saber, en la cual se retoma lo efectuado hasta el momento y el docente formaliza el conocimiento, aporta observaciones y clarifica conceptos. La tercera fase es la situación a-didáctica, en ésta se corrobora que el alumno se ha apropiado del conocimiento, al aplicarlo en su contexto fuera del aula.

El nuevo programa de matemática del MEP (Barrantes et al., 2012, p.76), sigue las mismas ideas al señalar cuatro pasos para organizar las lecciones:

- Propuesta de una “situación problema” para iniciar una lección.
- Resolución o aporte de ideas por parte de los estudiantes, individualmente o en subgrupos.
- Discusión interactiva y comunicación frente al conjunto del grupo de las soluciones o ideas aportadas por los estudiantes.
- “Institucionalización” de los conocimientos por parte del educador.

Adicionalmente, la enseñanza de la Matemática trabaja con la resolución de ejercicios y problemas, los cuales difieren entre sí: para resolver los ejercicios se utilizan procedimientos rutinarios y para resolver problemas, es necesario un análisis y estructuración de solución diferente. Ambas son de relevancia dentro de las clases de Matemática, pero para interés de la elaboración de los módulos, se da mayor relevancia a la resolución de problemas; la cual desde 1980 es considerada por la Asociación Norteamericana de Profesores de Matemáticas (NCTM), como la tarea fundamental de los profesores de Matemática. Para justificar la importancia de la resolución de Problemas en la enseñanza de la Matemática, George Polya expresó:

> Mi punto de vista es que la parte más importante de la forma de pensar que se desarrolla en matemática es la correcta actitud de la manera de cometer y tratar los problemas, tenemos problemas en la vida diaria, en las ciencias, en la política, tenemos problemas por doquier (…) Mi opinión personal es que lo central en la enseñanza de la matemática es desarrollar tácticas en la Resolución de Problemas.

Dentro de este método, el docente tiene un papel de importancia ya que debe plantear las sugerencias y preguntas necesarias para orientar a los estudiantes dentro de las estrategias. En relación a estas, María Luz Callejo (1990, p.180) establece que:

> Si se saben elegir y adaptar a cada problema, ofrecen pistas para diseñar un plan que, en el mejor de los casos, lleva a la meta perseguida. La actividad mental se traduce en un diálogo verbal con el maestro o en un diálogo interior con uno mismo.

Polya, citado por Alfaro (2006, p. 6), afirma que “la selección de preguntas que se plantean para cada paso no se escogen al azar: existen aspectos lógicos y psicológicos relacionados entre sí”. Por lo tanto, los docentes que utilizan la Solución de Problemas deben considerar los procesos lógicos y psicológicos de los estudiantes, con el objetivo de despertar y mantener el interés por el problema y llevar al estudiante a razonar, adaptando alguna heurística para trabajar la solución de problemas.

Retomando la función del docente dentro de la Resolución de Problemas, Polya indica que las preguntas que se le hacen a los estudiantes “no deben aplicarse de forma rígida, sino más bien como si se le hubieran ocurrido de forma espontánea al propio alumno” (SUMA, 1996, p. 103), con las cuales el docente desbloquea, proporciona contraejemplos, sugiere particularizaciones y generalizaciones, entre otros; para “iluminar el camino sin llegar a definirlo del todo” (Callejo, 1990, p. 181)

Durante este proceso, se evidencia el concepto de razonamiento plausible desde el punto de vista de las probabilidades de que las conjeturas presentes en la situación problema sean aceptadas o rechazadas.

> Si aprender matemáticas tiene algo que ver con el descubrimiento en esta disciplina, los estudiantes deben tener la oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel. (Polya, 1954; citado por Barrantes, 2006)

Entonces, se describe que este tipo de razonamiento permite elaborar hipótesis y conjeturas, examinar su validez, contrastarlas y reformularlas para obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser puestas a prueba. El razonamiento plausible es concebido por muchos autores como un proceso similar al razonamiento utilizado cotidianamente en el quehacer humano y de ahí la necesidad de abrir espacios en la educación formal para que los estudiantes lo desarrollen.

Como parte de la metodología que se pretende trabajar en la clase de Matemática, según lo estipulado por el MEP, se plantea el uso de las preguntas generadoras al tratar un tema, por medio de una indagación dirigida hacia toda la clase (Barrantes et al., 2012, p. 50). El procedimiento para trabajar estas preguntas es:

- Formulación de preguntas apropiadas sobre un tópico.
- Tiempo de espera para que se ofrezcan respuestas.
- Reformulación de las preguntas para avanzar en los distintos aspectos del tópico.
- Repetición del proceso hasta llegar a un cierre cognoscitivo y pedagógico del tema.

Las preguntas generadoras proponen que los estudiantes puedan “ver la conexión entre el currículo y sus propias vidas” (González, 2009, p. 2), con lo cual su aprendizaje será más significativo, comprendiendo el contenido estudiado por lapsos largos de tiempo.

Estas preguntas “proporcionan una estructura para organizar el cuestionamiento” (González, 2009, p. 3) durante la clase, es decir, sirven al docente para generar la discusión, por medio de la cual se desarrolla la construcción del conocimiento por parte del estudiante.

Existen tres tipos de preguntas generadoras, según menciona González (2009): esenciales, de unidad y de contenido. Las dos primeras buscan que el estudiante comprenda “el cómo y el por qué” de los contenidos que se está estudiando e “inducen al pensamiento crítico”, con lo cual se pretende que los estudiantes desarrollen la capacidad de identificarse con los contenidos y así lograr un mejor aprendizaje.

Las últimas, las de contenido, son más específicas pues se enfocan en identificar “el “quién”, “qué”, “cuándo” y “dónde” ” (González, 2009, p. 5), trabajando con los detalles más característicos de los contenidos.

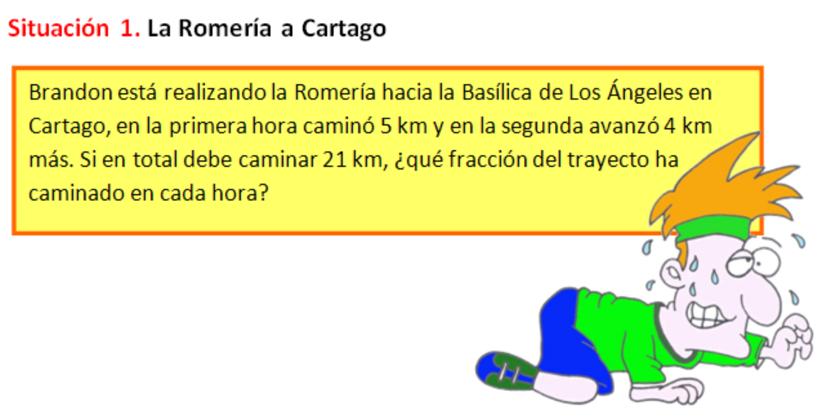
Todo planeamiento sobre ejes problematizadores, debe estar acompañado de un conjunto de preguntas generadoras.

Por medio de preguntas generadoras se fomenta el logro de un aprendizaje significativo, puentes cognoscitivos entre lo que el alumno ya sabe y lo que necesita saber, antes de que pueda adquirir un nuevo aprendizaje.

Resumiendo, las preguntas esenciales son las más generales, las de unidad pretenden “que los estudiantes interpreten los hechos por ellos mismos” (González, 2009, p. 7) y las de contenido requieren que se hayan hecho preguntas de unidad o esenciales de ellas, teniendo respuestas específicas o cerradas (González, 2009, p. 3).

En aras de ejemplificar la implementación en los módulos de las teorías descritas anteriormente, se presenta la estructura general de éstos:

Cada tema se introduce a través de una o varias situaciones problema, por ejemplo en el Módulo de Clasificación de Fracciones, se presenta la siguiente situación para el tema de fracciones homogéneas.


Situación 1. **La Romería a Cartago**

Brandon está realizando la Romería hacia la Basílica de Los Ángeles en Cartago, en la primera hora caminó 5 km y en la segunda avanzó 4 km más. Si en total debe caminar 21 km, ¿qué fracción del trayecto ha caminado en cada hora?

Ilustración 1. Módulo de clasificación de fracciones pág. 46

Luego, se plantea una serie de preguntas generadoras, como se muestra más adelante, con el fin de que se desarrolle la fase de discusión. Estas preguntas han sido elaboradas para que el estudiante conjeture sobre las posibles soluciones que se pueden dar sobre la situación problema, y como apoyo al docente para guiar al alumno.

Es decir, se planifican las preguntas para dar estructura a la discusión y una vez planteada cada pregunta, se debe dar el espacio para que los estudiantes intenten responderlas. A medida que avanza la discusión, se plantean nuevas preguntas para clarificar el camino a las respuestas buscadas y/o profundizar en el tema que se estudia.

A través de la repetición de este proceso, se espera que se dé la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos que se están estudiando a lo largo de las lecciones.

Ejemplo de preguntas generadoras:

- ¿Cuál es la distancia total que debe recorrer Brandon?
- ¿Cuántos kilómetros recorrió en la primera hora?
- ¿Qué fracción representa la distancia recorrida en la primera hora?

Ilustración 2. Módulo de clasificación de fracciones pág. 47

Finalmente, se entra en la formalización del concepto, el cual se asemeja a la fase de institucionalización del saber. Para este caso, se empleó también un cuadro de texto, el cual encierra de manera sintética los conceptos necesarios que el alumno requiere aprender y que el docente debe formalizar. Como ejemplo de esta "institucionalización", se presenta el siguiente cuadro del módulo Introductorio:

En resumen…

Fracciones Homogéneas

Dos o más fracciones se llaman **Fracciones Homogéneas** si tienen igual denominador. Ejemplos:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{11}{4}$$

Ilustración 3. Módulo de clasificación de fracciones pág. 47

Para Douady, un marco o cuadro “está constituido por objetos de una rama de la matemática, sus relaciones y sus formulaciones. Por ejemplo, el álgebra, la geometría y otros” (Rivel, 2010, p. 6). Es decir, el cuadro corresponde a un contenido matemático específico Jiménez (2007) cita a Douady para definir el cambio de cuadros como

> un medio para obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser necesariamente del todo equivalentes, permiten un nuevo acceso a las dificultades encontradas y la puesta en práctica de herramientas y técnicas que no se imponían en la primera formulación (p. 23)

Dicho de otro modo, el cambio de cuadros corresponde a utilizar un conocimiento previo como herramienta para facilitar la comprensión de uno nuevo. De esta manera, el utilizar el cambio de cuadros, según Jiménez (2007), se tiene que el docente moviliza objetos en la solución del problema, utilizándolos con propósitos específicos.

Así, por ejemplo, cuando se trata de enseñar el algoritmo de la suma de fracciones a un estudiante, se suele utilizar la representación gráfica de cada una de estas fracciones para que el estudiante, visualmente, deduzca el resultado de la suma y consecuentemente, puede deducir el algoritmo y resolver situaciones que involucren esta operación, sin necesidad de utilizar la representación gráfica.

Se ha pretendido que el material que se ha elaborado sea lo suficientemente claro para los docentes, para que éstos no se vean en la necesidad de recurrir directamente a la Teoría de Situaciones Didácticas ni a las otras teorías utilizadas en los módulos. Por lo tanto, no se pretende realizar en este trabajo un desarrollo sistemático de las teorías mencionadas.

3. Etapas de la investigación

Durante el desarrollo del estudio, se llevaron a cabo dos etapas:

Etapa 1: Revisión Bibliográfica

Se identifican y se delimitan el problema y los objetivos de investigación, a través de una revisión de documentos nacionales e internacionales, con el fin de identificar el estado actual de la enseñanza de las fracciones.

Como parte de esta revisión se contemplaron materiales didácticos, resultados de investigaciones que tratan sobre las diferentes tendencias didácticas que se utilizan actualmente en la educación matemática; para posteriormente seleccionar la información más relevante para la investigación.

Etapa 2: Análisis Curricular y Construcción de los Módulos

Con el fin de abarcar de manera integral la enseñanza de las fracciones, se realiza un análisis del Programa de Estudio de Matemática del MEP 2012, para conocer los lineamientos metodológicos y filosóficos con los que se orienta la educación costarricense y el quehacer docente y finalmente con la información recolectada se diseñan seis módulos orientados en la enseñanza de las diferentes interpretaciones del concepto de fracción.

4. Resultados

Se diseñaron seis módulos en el tema de fracciones a lo largo de la EGB:

1. **Módulo Introductorio:** se introducen las primeras nociones intuitivas sobre el concepto en dos de las interpretaciones del concepto de fracción: parte-todo y medida. Se incluye una cantidad de situaciones que destacan sus representaciones gráficas y simbólicas, así como la lecto-escritura de fracciones, fracciones equivalentes, amplificación y simplificación de fracciones.
2. **Módulo de Clasificación de Fracciones:** se centra en el estudio de las diferentes clasificaciones: propias, unitarias e impropias; homogéneas y heterogéneas; y adicionalmente, se estudia el número mixto como otra representación de una fracción impropia y los algoritmos de conversión de una forma a otra.
3. **Módulo de Notación Decimal y Relaciones de Orden:** se presentan las fracciones decimales, la noción de décimas, centésimas y milésimas, la división decimal (interpretación de fracción como cociente), la notación desarrollada, conversiones de notación decimal a notación fraccionaria y viceversa, relaciones de orden sobre las fracciones. y ubicación de las fracciones sobre la recta numérica.
4. **Módulo de Suma y Resta de Fracciones**: se contemplan las operaciones fundamentales de suma y resta, así como su combinación, tanto con fracciones homogéneas, como con fracciones heterogéneas y números mixtos.

5. **Módulo de Multiplicación y División de Fracciones:** se contempla la interpretación de fracción como operador, a partir de la multiplicación y división de fracciones.
6. **Módulo de Razones y Proporciones:** Se introduce la interpretación de fracción como razón, para estudiar su aplicación en proporciones, porcentajes, interés simple, impuestos y descuentos.

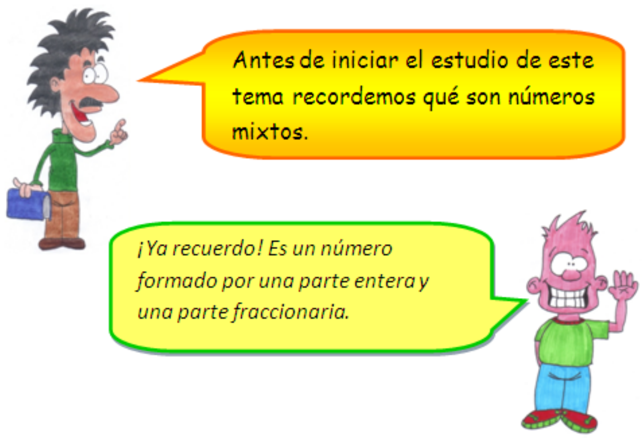
Cada módulo está estructurado de la siguiente manera:

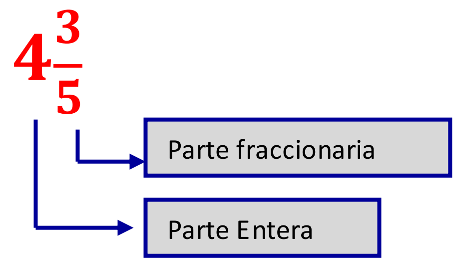
- Una práctica diagnóstica, con el fin de evaluar y consolidar los conocimientos previos necesarios para los contenidos a desarrollar.
- Una "curiosidad matemática", con el fin de abordar algunos hechos históricos matemáticos relevantes.
- Esquemas de resumen, para orientar a los docentes en los temas contemplados en el módulo.
- Los contenidos curriculares, introducidos a través de situaciones problemas contextualizadas y una propuesta de solución mediante preguntas generadoras para cada situación.
- Institucionalización de los conocimientos, bajo el título de "En Resumen…", en la cual se establece de manera formal los contenidos curriculares presentados.
- Cuadros informativos denominados "¿Sabías qué…?", con el fin de dar a conocer información de carácter cultural, deportivo, social, entre otros; basados en el contexto costarricense.
- Prácticas evaluativas elaboradas al final de cada contenido y una práctica final al terminar el módulo, constituidas con diferentes tipos de ejercicios y problemas.

Ejemplos de Situación Problema

Seguidamente mostraremos algunas de las situaciones problema desarrolladas en los módulos para el estudio de Suma de Números Mixtos.

Suma de Números Mixtos





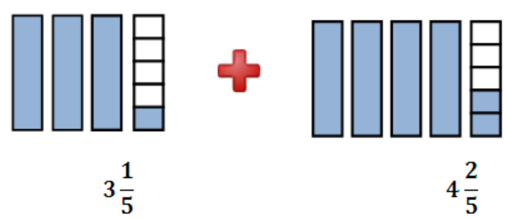
Aplicar lo que se ha estudiado…

Con ayuda de lo estudiado sobre suma y resta de fracciones, pregunte a los estudiantes:

¿Cuál es el resultado de $3\frac{1}{5} + 4\frac{2}{5}$?

Para guiar a los estudiantes proponga:

Mostrar por medio de tiras de papel la representación gráfica de cada fracción.



- ¿Qué resultado se obtiene si se suman los números enteros (tiras completas)?
- ¿Qué resultado se obtiene si se suman las fracciones?
- ¿Qué resultado se obtiene si se suman ambos resultados?
- De acuerdo con lo anterior, ¿qué conclusión obtiene para la suma de números mixtos?

De la misma manera pregunte:

¿Cuál es el resultado de $5\frac{1}{7} + 1\frac{1}{4}$?

Las preguntas anteriores se plantean para que el estudiante determine que para la solución de la suma de números mixtos, se suman las partes enteras entre sí y las partes fraccionarias entre sí.

Situación 1: **Viaje a Golfito**

Presente a los estudiantes la siguiente situación:

Plusito viajó a Golfito en bus, en el transcurso del viaje realizó tres paradas, las cuales se especifican en la tabla siguiente:

Trayecto	Duración
San José - Cerro de la Muerte	$2\frac{1}{3}$ **h**
Cerro de la Muerte - Pérez Zeledón	$1\frac{3}{4}$ **h**
Pérez Zeledón - Golfito	$3\frac{4}{5}$**h**

¿Sabías que…?

El macizo Cerro Buena Vista (3491 msnm[1]), mejor conocido como "Cerro de la Muerte", es parte de la Cordillera de Talamanca. El lugar se caracteriza por el clima frío (1ºC a 13 ºC) y la vegetación de robles, encinos y páramo.

[1] metros sobre el nivel del mar

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es el tiempo total del viaje?

Una propuesta de solución:

Guíe al estudiante en la solución mediante las siguientes preguntas:

- ¿Qué tipo de operación es la que requiere la solución del problema?
- Observando los tiempos de cada recorrido, indique una estimación, en horas del tiempo, de cada recorrido y una estimación del recorrido total.

Se espera que los estudiantes completen una tabla como la siguiente:

Tiempo	Aproximado
$2\frac{1}{3}$ **h**	2 horas
$1\frac{3}{4}$ **h**	2 horas
$3\frac{4}{5}$**h**	4 horas
Total aproximado	**8 horas**

El objetivo de obtener un resultado aproximado es que el estudiante después de realizar la operación compare su respuesta con lo estimado y verifique la concordancia de los resultados.

- Solicite resolver la operación que da solución a la situación.

$$2\frac{1}{3}+1\frac{3}{4}+3\frac{4}{5}=$$

- Guíe al estudiante a notar que para resolver este tipo de operación es necesario separar la parte fraccionaria y la parte entera de cada número mixto que componen la suma.

Suma de Partes Fraccionarias
$\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=}$

Suma de Partes Enteras
$\mathbf{2+1+3=}$

Suma de las partes fraccionarias

- ¿Las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$ son homogéneas o heterogéneas? ¿Por qué?
- ¿Recuerda cómo se suman este tipo de fracciones?

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{2\cdot 2}+\frac{1}{2}$$

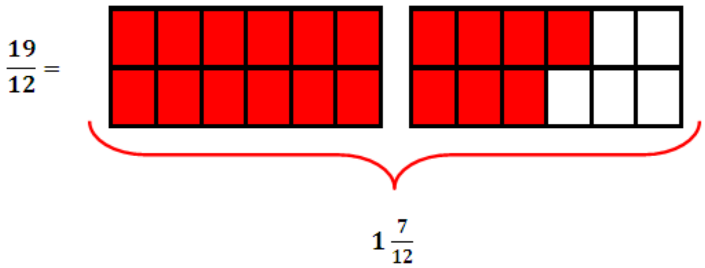
$$=\frac{1}{3}\cdot\mathbf{\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2}}+\frac{3}{2\cdot 2}\cdot\mathbf{\frac{3}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\mathbf{\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}}$$

$$=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}+\frac{6}{12}$$

$$=\frac{19}{12}$$

Pregunte a los estudiantes:

- ¿La fracción resultante es una fracción propia o impropia?
- Represente $\frac{19}{12}$ como un número mixto.



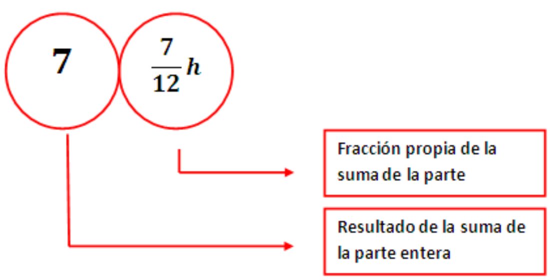
Recalque que la fracción $\frac{19}{12}$ está constituida por el entero 1 y la fracción propia $\frac{7}{12}$.

a) Suma de las partes enteras:

Para sumar las partes enteras, debe tomarse en cuenta tanto la parte entera de cada número mixto dado en la situación, como la parte entera del resultado obtenido en la suma de las partes fraccionarias:

$$2+1+3\ +\ \mathbf{1}\ =7$$

Finalmente se debe sumar el resultado de ambas sumas para dar la respuesta final



De esta manera, el viaje duró $7\frac{7}{12}$ horas.

Establezca las siguientes preguntas:

- ¿Considera que la respuesta obtenida es coherente con el tiempo estimado al inicio?
- Cuando se suman las partes fraccionarias en los números mixtos, ¿por qué será necesario fijarse si el resultado es una fracción impropia?
- ¿Considera usted que existe otro procedimiento para sumar números mixtos? Explique
- ¿Cómo se puede saber si el resultado de la suma o resta de números mixtos es correcta?
- En la suma de dos números mixtos, ¿siempre se obtiene como resultado un número mixto?

Situación 2: **Carrera de Relevos**

¿Sabías que…?

En la prueba de relevos 4x400 metros, cada atleta corre 400 m, y al terminar debe entregar la estafeta (vara de relevo) al siguiente compañero hasta completar los 4 participantes.

En una carrera de relevos de 4×400 realizada por estudiantes de secundaria, Sofía recorrió sus $400\ m$ en $1\frac{1}{2}$ minutos, Mariana en $1\frac{1}{3}$ minutos, Anna en $1\frac{3}{8}$ minutos y Adrianna en $1\frac{1}{4}$ minutos.
¿Cuánto tiempo tardó en minutos el equipo en completar la prueba?

Una propuesta de solución:

Comience por cuestionar a los estudiantes:

¿Qué operación resolvería esta situación?

La respuesta esperada es una suma, por lo cual se plantea la operación:

$$1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{3}{8} + 1\frac{1}{4} =$$

Para resolver la operación los estudiantes pueden proceder a realizar la suma de números mixtos como en los casos anteriores, sumando por un lado, las partes fraccionarias y, por otro, las partes enteras. Sin embargo, también se puede resolver mediante la transformación de números mixtos a fracciones impropias.

Recordemos que los números mixtos pueden ser representados por fracciones Impropias.

Números Mixtos	Procedimiento de transformación		Fracciones Impropias
$1\frac{1}{2} =$	$1 + \frac{1}{2} =$	$\frac{2}{2} + \frac{1}{2} =$	$\frac{3}{2}$
$1\frac{1}{3} =$	$1 + \frac{1}{3} =$	$\frac{3}{3} + \frac{1}{3} =$	$\frac{4}{3}$
$1\frac{3}{8} =$	$1 + \frac{3}{8} =$	$\frac{8}{8} + \frac{3}{8} =$	$\frac{11}{8}$
$1\frac{1}{4} =$	$1 + \frac{1}{4} =$	$\frac{4}{4} + \frac{1}{4} =$	$\frac{5}{4}$

Luego de realizar la conversión de cada número mixto a fracción impropia, se procede a realizar la suma de fracciones del siguiente modo:

$$1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{3}{8} + 1\frac{1}{4} =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{11}{8} + \frac{5}{4} =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 2} =$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{3}{3} + \frac{5}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{36}{24} + \frac{32}{24} + \frac{33}{24} + \frac{30}{24}$$

$$= \frac{36 + 32 + 33 + 30}{24}$$

$$= \frac{131}{24}$$

Ahora pregunte a los estudiantes:

¿Cómo se representa el resultado como número mixto?

De este modo, utilizando el procedimiento ya conocido por el estudiante, la respuesta final corresponde a $5\frac{11}{24}$ minutos.

Ahora, utilizando relaciones de orden, puede preguntar a los estudiantes:

En resumen…

Suma y Resta de Números Mixtos

A continuación por medio de un ejemplo se presentan dos maneras de resolver la suma de Números Mixtos.

$$\mathbf{3\frac{2}{3} + 2\frac{3}{7} =}$$

1. **Trabajar en forma separada parte entera y parte fraccionaria**

Una forma de efectuar la **suma de números mixtos** consiste en separar la parte fraccionaria y la parte entera de cada número mixto, para ser trabajadas de forma independiente.

Número Mixto	Parte Fraccionaria	Parte Entera
$\mathbf{3\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}$	3
$\mathbf{2\frac{3}{7}}$	$\frac{3}{7}$	2
Suma	$\mathbf{\frac{2}{3} + \frac{3}{7}}$	$\mathbf{3 + 2}$

a) **Suma de partes fraccionarias:**

Se realiza la suma de fracciones, sean homogéneas o heterogéneas, aplicando lo que se ha estudiado a lo largo del módulo.

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{7} = \frac{23}{21}$$

Nota: Si en la suma de las partes fraccionarias se obtiene como resultado una fracción mayor a la unidad o impropia, ésta se deberá expresar como un número mixto.

$$\frac{23}{21} = \frac{21}{21} + \frac{2}{21} = 1 + \frac{2}{21} = 1\frac{2}{21}$$

La parte fraccionaria de este número mixto, será usada en nuestra respuesta, mientras que la parte entera se sumará con las partes enteras de las fracciones iníciales.

Número Mixto	Parte Fraccionaria	Parte Entera
$1\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	1

b) Suma de partes enteras:

Una vez que obtenemos la parte fraccionaria, se suman los números enteros, tanto de las expresiones iníciales como la que se obtuvo en la suma de las partes fraccionarias; de este modo obtendremos la parte entera de la solución buscada.

Sumando los números enteros se obtiene como resultado 6.

$$3+2+1=6$$

Así la solución de la suma es $6\frac{2}{21}$.

2. Realizando la conversión de numero mixto a fracción impropia

Una manera de efectuar, tanto la suma como la resta de números mixtos, es por medio de su representación como fracciones impropias, y realizando la suma o resta según sea el caso.

Número Mixto	Conversión	Fracción Impropia
$\mathbf{3\frac{2}{3}}$	$3+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=$	$\frac{11}{3}$
$\mathbf{2\frac{3}{7}}$	$2+\frac{3}{7}=\frac{7}{7}+\frac{7}{7}+\frac{3}{7}=$	$\frac{17}{7}$
Suma	$\frac{11}{3}+\frac{17}{7}=6\frac{2}{21}$	
Resta	$\frac{11}{3}-\frac{17}{7}=1\frac{5}{21}$	

Además, considerando que todo número entero se puede expresar como una fracción cuyo denominador es el entero y el denominador el 1, considere el siguiente algoritmo:

Número Mixto	Conversión	Fracción Impropia
$\mathbf{3\frac{2}{3}}$	$3+\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{3}{1}}+\frac{2}{3}=$	$\frac{11}{3}$
$\mathbf{2\frac{3}{7}}$	$2+\frac{3}{7}=\mathbf{\frac{2}{1}}+\frac{3}{7}=$	$\frac{17}{7}$
Suma	$\frac{11}{3}+\frac{17}{7}=6\frac{2}{21}$	
Resta	$\frac{11}{3}-\frac{17}{7}=\frac{26}{21}=1\frac{5}{21}$	

5. Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

La experiencia de esta investigación tiene valor profesional por los aspectos teóricos que se han recopilado durante su realización y por la redacción de situaciones problema, preguntas generadoras, procesos y ejercicios matemáticos.

- El programa de matemática actual MEP 2012 propone un cambio de metodología por parte de los docentes en las clases de matemática, pues solicita establecer la interdisciplinariedad mediante la resolución de problemas. Sin embargo, a nivel nacional no existen propuestas pedagógicas, con la metodología planteada por el MEP, para abordar la enseñanza de la matemática en el tema de fracciones.

- El concepto de fracción cuenta con diversidad de interpretaciones y se utiliza en diferentes contextos, lo que caracteriza este eje temático como complejo. Por este motivo, se debe apoyar la enseñanza de fracciones con material concreto y gráfico como una herramienta que favorece estas interpretaciones.

- Ante los cambios y demandas en la enseñanza de la matemática, se hace necesario la participación activa de especialistas en matemática dentro de los procesos de la educación primaria y secundaria, con el propósito de aportar sus conocimientos y fortalecer el trabajo de los docentes y así, minimizar obstáculos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

Recomendaciones

De acuerdo con las conclusiones descritas anteriormente, se presentan algunas recomendaciones.

- Es necesario abrir espacios dentro de la formación de los futuros profesores de matemática en secundaria, para darles a conocer la realidad que se vive en la educación costarricense, en particular en primaria y sus limitantes, de toda índole.
- Al enseñar la noción de fracción como Parte-Todo, el docente debe tomar en cuenta unidades continuas y discretas, así como el uso de material concreto para que los alumnos manipulen y logren construir el concepto de fracción.

- Se recomienda la elaboración de trabajos similares a éste, en particular un módulo de números racionales que permita dar seguimiento a la propuesta pedagógica realizada.
- Implementar la validación del módulo, por parte de especialistas de currículo y evaluación para que en un trabajo colaborativo, brinden sus observaciones y recomendaciones.

Referencias Bibliográficas

Alfaro, C. (2006). *Las ideas de Pólya en la resolución de problemas*. Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno1/Cuadernos%201%20c%202.pdf

Arce, R. y Marín, M.(2011). Comunicación: Propuesta multimedial para navegar en la diversidad semántica de la fracción. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/866/submission/layout/866-7443-1-LE.pdf

Barrantes, H., Chaves, E., De Faria, E., Poveda, R., Ruiz, A. y Salas, O. (2012). *Programa de Estudio Matemáticas.* Costa Rica.

Callejo, M. (1990). *La Resolución de problemas en un club matemático*. Madrid, España.

Cerdas, E.; González, J; Marín, A; Martínez, E y Ruiz, K. (2013). Módulos de apoyo docente para la enseñanza de las fracciones en la Educación General Básica de Costa Rica. (Tesis de Licenciatura). Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.

Consejo Estadounidense de Profesores de Matemática (NCTM). (2004). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* SAEM, Thales: Sevilla.

Gaete, M y Jiménez, W. (2011). *Carencias en la formación inicial y continua de los docentes y bajo rendimiento escolar en Matemática en Costa Rica*. Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática. San José, Costa Rica.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2004).*Didáctica de la Matemática para Maestros.* Recuperado de http://www.redes-cepalcala.org/inspector/DOCUMENTOS%20Y%20LIBROS/MATEMATICAS/DIDACTICA%20DE%20LAS%20MATEMATICAS%20PARA%20MAESTROS.pdf

González, E. (2009) Aspectos Fundamentales de las Preguntas Esenciales. Recuperado de http://www.slideshare.net/adalbertomartinez/preguntas-generadoras

Jiménez, L. (2007). *Enseñanza de la geometría euclídea usando un enfoque afín: una propuesta a discutir*. (Tesis de maestría). Universidad de Costa Rica. San José.

Murillo, J y Marcos, G. (2008). *Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo.* Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/tecnologia/Un%20Modelo%20de%20An%C3%A1lisis%20de%20Competencias%20Matem%C3%A1ticas%20en%20un%20Entorno%20Interactivo.*Murillo,%20Jes%C3%BAs%3B%20%20Marcos,%20Guillermina.*Murillo,%20J.%20Un%20modelo%20de%20an%C3%A1lisis%20de%20mate...2005.pdf

Riera S, (2006). *Fundamentos básicos sobre un módulo didáctico*. Recuperado de http://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/385/1/CD-0321.pdf

Sadovsky, P. (2005). *La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Mexico.

SUMA (1996). *Polya, un clásico en la resolución de* problemas. Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/22/103-107.pdf